DOI:10.16104/j.issn.1673-1883.2004.04.019
第16卷第4期 西昌师范高等专科学校学报 Vol.16,No.4
2004年12月 Journal of Xichang Teachers College Dec., 2004

高等数学教学中形象思维方法应用的探索

许建琼

（西昌学院 数理系，四川 西昌 615022）

【摘 要】高等数学是变量数学，针对变量数学理论性、抽象性强的特点，本文用形象思维方法解决几个实例，探索了形象思维方法解决问题的优越性，提高学生理解问题、分析问题的实际能力。

【关键词】高等数学；形象思维方法；导数；切线斜率；定积分

【中图分类号】G642.304 【文献标识码】B 【文章编号】1008-6307(2004)04-0063-03

The Exploration in the Application of Thinking Methods in Images in the Higher Mathematics Teaching

XU Jian-qiong

(*Xichang College*, *Xichang 615022*, *Sichuan*)

Abstract: Higher mathematics is a type of variable mathematics. Because of the strong theoretic and abstractive features of the variable mathematics, this paper solves several caese via the thinking methods in images, and explores the advantages of solving problems by this method, in order to improve the students' actual ability to understand and analyze a problem.

Key words: hibher mathematics; thinking methods in images; derivate; slope of tangent line; definite integral

高等数学是变量数学，理论性、抽象性比较强，而现行的大部分数学教材的教学过程都是从概念到概念，从定理到推论，无处不在强调逻辑演绎的严格性，却很少谈及定理或公式的发现过程，也不论及学科的思想方法和实际背景。这就往往使得学生把一条重要定理的证明过程推导的非常熟练，却说不出定理内容的根本思想，更不知道其证明过程的来龙去脉，对一些没见过的题，则感到无从下手。因此，要提高学生理解问题、分析问题的能力，就要求教师重视对数学知识形成过程的分析，重视发现过程和总结，重视运用形象思维方法。

一、用形象生动的实例引入概念，加深对概念产生背景的理解。

《高等数学》中的概念比较抽象，难以理解，因此在教学中不要过于直接给出抽象的理论，要从感性入手，通过具体的、容易理解的实例抽象出事物的本质，得到相应的结论。如在讲随机变量这一概念时，不直接从概念入手，可以从投一枚硬币观察其正面朝上的次数，种下一粒种子观察其发芽粒数等比较具体的实例，构造变量X，使实验结果与数量之间建立对应关系，从而抽象出随机变量，这样讲解能帮助学生把抽象的概念具体化，深刻理解概念。

这种由具体实例引入概念或把概念具体化在高等数学中是很多的。又如在‘各种积分间的联系’这一节中所涉及到的单连通区域和复连通区域这两个概念，我们可以用一张很薄的纸所占的平面来表示一个区域。至于单连通区域和复连通区域，则可以以一张很薄且无洞的纸张所占的平面来表示单连通区域，而用一张很薄且有洞孔的纸张所占的平面来表示复连通区域。总之，我们可以把抽象的概念具体

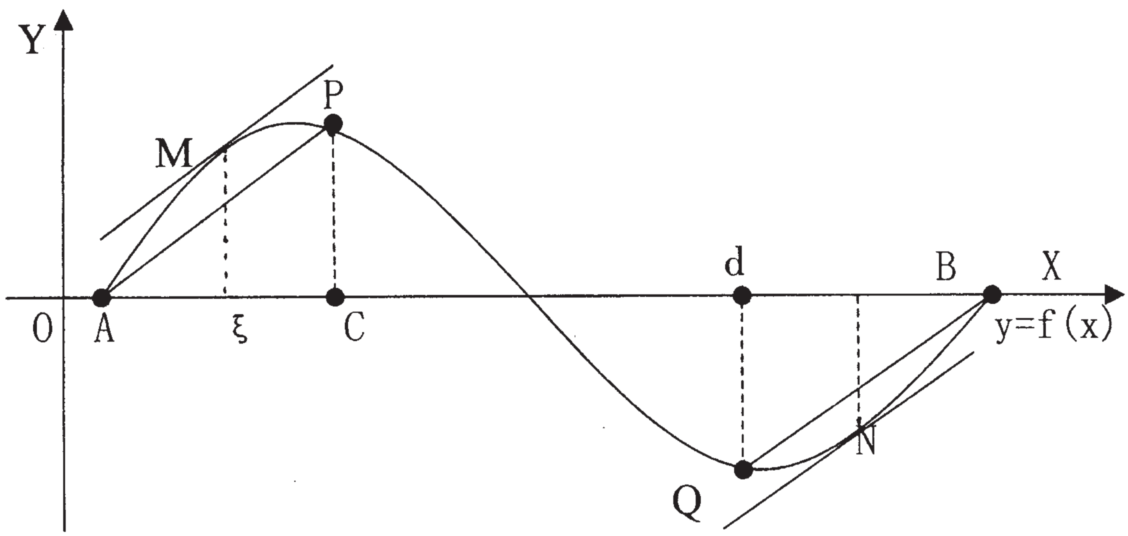
收稿日期：2004-09-10
作者简介：许建琼(1977-)，女，助教。
致谢：本文系胡清林教授主持的四川重点研究课题SA02-006研究成果，感谢主持人的指导。

化,通过具体的实例形象生动的加深对概念的理解。

二、深刻理解数学知识产生的实际背景,强化形象思维能力。

每一个知识的产生都有其产生的背景,而许多背景恰是对该内容的形象直观解释,只有透彻理解这一背景,才能更好地把握其实质,开阔解题思路。如导数是微积分的重要概念之一,它产生的一个背景就是为了描述曲线的切线,而在一元函数微分学中,微分的概念、中值定理、函数的单调性、函数的极值、曲线的凹凸性等,都与切线有着密切的联系,因此在讲到导数的概念时,要特别强调导数与曲线切线之间的关系,使学生把导数这一抽象问题在头脑中形象化。

例1、已知函数$f(x)$满足条件:(1)在$[a,b]$上连续,且$f(a)=f(b)=0$,(2)在(a,b)内可导,$f'(x)$不恒为0。证明:在(a,b)内至少存在一点ξ,使$f'(\xi)>0$。



(图1)

分析:这道题一看不知道在说什么,但条件和结论中都出现了导数,教师要引导学生探求此题的证明思路,就要与切线联系在一起。首先观察函数$f(x)$的图形(图1),条件(1)表明,函数$f(x)$的图象是一条连续曲线,而且曲线的两个端点都在X轴上;条件(2)表明,这条曲线除端点外,每一点都有切线,而且不会所有的切线都平行于X轴。题设条件表明,曲线$y=f(x)$不可能点点都在X轴上,因此必能在X轴的上方或下方找到曲线的点。例如在X轴的上方找到点$P(c,f(c))$连接AP,这时从图形观察到,在曲线段AP上存在一点$M(\xi,f(\xi))$,使得曲线在点M的切线平行于弦AP,由于弦AP的斜率大于0,因此切线的斜率也大于0,于是$f'(\xi)>0$,这就是本题的结论,这个结论是从观察图形得到的,但这与拉格朗日中值定理的几何意义相吻合,这就为我们在理论上证明此题提供了思想。在$[a,b]$上对$f(x)$运用拉格朗日中值定理即可证明此题。如果在X轴的下方,同样可以用类似的方法找到一点$Q(d,f(d))$。对于这道题,如果在学生的头脑中,导数与切线之间没有本质联系的话,则很难找到解题的思路。

例2[1]:求螺旋线$\begin{cases}x=\alpha\cos t\\ y=\alpha\sin t\\ z=bt\end{cases}$在点$(\alpha,0,0)$处的切线及法平面方程。

分析:此题的求解是很简单的,是上一例题的推广。即一元函数表示的平面曲线推广到空间曲线的情形。方法是类似的,关键是要掌握空间曲线与其上某一固定点处的切线和法平面的位置关系,同时结合矢量积运算所表示的向量间的关系即可求解出此题。在"空间曲线的切线与法平面"[2]一目中,我们已清楚的知道x、y、z关于t的一元函数的导数$\frac{dx}{dt}=-\alpha\sin t$,$\frac{dy}{dt}=\alpha\cos t$,$\frac{dz}{dt}=b$在$(\alpha,0,0)$点处(即$t=0$时)的值,分别作为第一、第二、第三个分量构成的向量$(0,\alpha,b)$是此曲线在$(\alpha,0,0)$点处的切向量。若(x,y,z)表

示切线上的任意一点,则$(x-\alpha,y,z)$是切线上以$(\alpha,0,0)$为起点的任意向量,根据向量间的关系得知向量$(x-\alpha,y,z)$和$(0,a,b)$平行,从而得到曲线在该点处的切线方程$\frac{x-\alpha}{0}=\frac{y}{\alpha}=\frac{z}{b}$

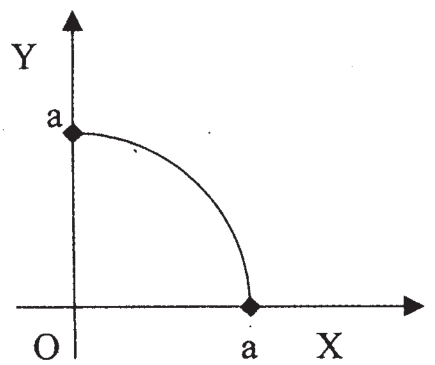
即:$\begin{cases} x=\alpha \\ by-\alpha z=0 \end{cases}$。

若(x,y,z)表示法平面上的任意一点,则$(x-\alpha,y,z)$是法平面上以$(\alpha,0,0)$为起点的任意向量。由定义知$(x-\alpha,y,z)$与$(0,\alpha,b)$垂直,故曲线在该点处的法平面方程为:$\alpha y+bz=0$。

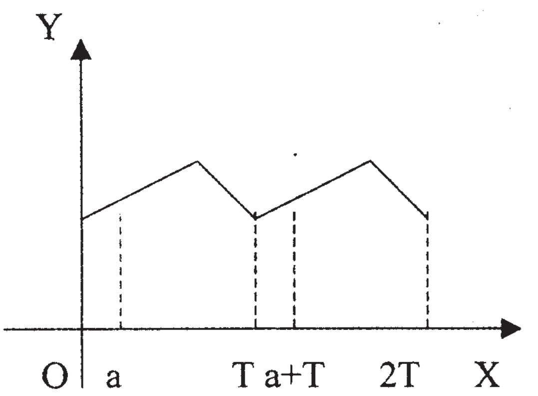
三、强化对几何形象的应用,开阔解题思路。

在教学中,教师在讲完定理、公式后,往往只是粗略地提一下它们的几何意义,很少讲如何去深刻地理解,并如何巧妙地加以应用,这样就造成了问及几何意义时,往往都知道,而用到时却想不到。实践证明,对几何意义的考虑,已成为许多典型方法产生的源泉,也是学习数学的一种基本思想,教师应有意识地锻炼学生形象思维的能力。

例3[3]:定积分$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$在几何上表示由$X$轴、$x=0$、$x=a$三条直线及$y=\sqrt{a^2-x^2}$曲线所围成的曲边三角形的面积,而这个曲线边三角形恰好是半径为a的四分之一圆(图2),则有$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi a^2/4$,利用这个定积分的几何意义,不但能帮助我们理解定积分的内容,还能帮助我们探求许多问题的解题思路。



(图2)



(图3)

例4:设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上以T为周期的连续函数,证明对任何实数a有$\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,ds$

分析:这个积分等式的几何解释如(图3)所示。积分$\int_a^{a+T}f(x)\,dx$表示推广区间$[a,a+T]$部分的曲边梯形的面积,而积分$\int_0^T f(x)\,dx$则表示位于区间$[0,T]$部分的曲边梯形的面积,积分等式则表示两曲边梯形面积应该相等。要证明这两个曲边梯形面积相等,只需证明位于区间$[0,a]$和$[T,a+T]$部分的两个较小曲边梯形的面积相等就行,根据定积分的几何意义,这就需要证明$\int_0^a f(x)\,dx=\int_T^{a+T}f(x)\,dx$,这是解决本题的关键。

从上述情况可以看出,运用形象思维方法,不仅能使抽象的数学变得生动,更有利于提高学生理解问题、分析问题的能力;同时,也需要教师要有着丰富的专业和课外知识,并能够把抽象的知识变得形象化,使学生易于接受。在讲授中,一方面要善于从实际背景、几何意义让学生理解有关知识,另一方面,要使学生善于把有关的知识在头脑中转化为几何直观来理解。另外,在教学中,教具模型的合理使用,优美的几何、函数图形,同样可使学生的思路柳暗花明,多媒体更是直观教学的重要工具,教师应重视开发学生的形象思维能力,用形象思维的观念去指导数学教学,因为逻辑思维给人以工具,而形象思维则给人以启示。

(下转68页)

强调学生共同学习前的小组组建活动，对小组内部学习活动情况，多是共同协商研讨。教师的批阅量也相应减少了。

小组调查法（简称GII方法）。也称为“分段任务”。是由以色列特拉维夫大学研究小组的塞伦夫妇所创设的，是一项普通课堂组织条件下的学习活动。学生们在小组中运用小组分块，合作性探究，小组讨论，合作性设计等方式展开学习。在这一方法中，学生们组成2人小组，在从整个班级都学习的单元内容中，选取出一个子课题内容，各小组再将子课题内容分剖成若干小块，每一小块就是一个人任务，落实到每一个学身上，大家都有事情做，同时开展必须的辅助活动，例如预备小组报告，每一个成员都做此报告。然后，每个小组以一名代表做本小组的学习报告，介绍学习成绩，展示结论，交流自己的发现。

沙塔诺夫纲要信号表。也称为‘教室成绩清单”。在体现合作、自主的教学策略上，沙塔洛夫在教室里挂了一张学生《每周成绩表》，上面记录学生每次功课的成绩，采用5分制评价，一次功课后，有60%的学生获得了5分，则用钢笔填入，其余用铅笔填入，作业错误的学生即时补习更正后，教师擦去铅笔字痕，用钢笔填入5分，这时满分率能够达到90%，余下的再进行一次，使满分率达到100%，这样，一学期下来，全班学生在平时学习过程中，均为满分，并将此结果提供给家长和学校。

提倡小组合作学习，训练了学生的合作意识，提高了学生的合作技能，增强了学生完成学习任务的可能性，这在新课程改革的背景下是一种行之有效的学习策略。只要我们以教育工作者的高度责任感对待新课程改革，积极探索教育科学规律，探索合作学习的新路子，我们所从事的教学改革一定会取得成效。

注释及参考文献：

〔1〕钟启泉.《新课程师资培训精要》.北京大学出版社，2002年6月.

〔2〕裴娣娜.《合作学习的教学策略》.《主体教育实验通讯》，2002年10月.

（上接65页）

注释及参考文献：

〔1〕胡清林主编.解析几何学.成都 :电子科技大学出版社，2002.

〔2〕同济大学数学教研室主编.高等数学.北京 :高等教育出版社，1988.

〔3〕陈传璋等编.数学分析.北京 :高等教育出版社，1983。