DOI:10.16104/j.issn.1673-1883.2004.02.032
第16卷第2期 西昌师范高等专科学校学报 Vol.16,No.2
2004年6月 Journal of Xichang Teachers College Jun., 2004

一类整数变量的多元对称函数的最小值及最大值问题

邓继林

（西昌学院 数理系，四川 西昌 615022）

【摘 要】本文主要是解决了一些常见的n元整数变量的对称函数，在条件

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=c \quad x_i \geqslant 0, \ i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

下的最小值、最大值问题，及其相关的一些问题，式中c是取定的正整数常数。

【关键词】整数变量；对称函数；最小值；最大值

【中图分类号】O174 【文献标识码】A 【文章编号】1008-6307(2004)02-0102-03

一 n维整数点集 Vc

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个整数变量，c是一个取定的正整数常数，构作n维整数点集。

$$Vc=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n} x_i=c \quad x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\right\} \tag{2}$$

这是本文所要研究的函数$f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的定义域，对于点集Vc中的点$A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，如果它的任意两个分量$a_i$、$a_j$之差的绝对值$|a_i-a_j|\leqslant 1$，则称该点是点集Vc中的一个N极点，如果存在两个分量a_i、a_j，使得$|a_i-a_j|=c$，则称该点是点集Vc中的一个S极点。

作整数的带余除法，可得

$$c=nq+r \qquad 0\leqslant r<n \tag{3}$$

于是点$A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是点集Vc的一个N极点的充分且必要的条件是，数组$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n−r个非负的整数q，及r个正整数q+1组成的，是点集Vc的一个S极点的充分且必要的条件是，数组$a_1,a_2,\cdots,a_n$中恰有一个$a_i=c$，而其余的分量全为0，由此推出点集Vc中恰有C_n^r个N极点，恰有C_n^1，即n个S极点。

若点集Vc中的点$A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$不是N极点，那么存在分量a_i、a_j，使得$a_i-a_j=2L+\delta$，式中的L是一个正整数，$\delta=0,1$，对于正整数ℓ，如果$0<\ell<L$，令

$a'_i=a_i-\ell$，$a'_j=a_j+\ell$，则有$a'_i\geqslant 0$，$a_j\geqslant 0$，

$$a'_i-a'_j=(a_i-\ell)-(a_j+\ell)=(a_i-a_j)-2\ell$$
$$=(2\ell+\delta)-2\ell=2(L-\ell)+\delta$$

由此推出 $|a'_i-a'_j|=2(L-\ell)+\delta<|a_i-a_j|$

$$a'_i+a'_j=(a_i-\ell)+(a_j+\ell)=a_i+a_j$$

并以a'_i，a'_j分别取代点A的分量a_i、a_j，即得点A_1，这称为是对点A施行了一次变换，点A_1是由点A施行了一次上述的变换得到的，综上所述显然有$A_1\in Vc$

法国数学家费尔马(1601—1665)在研究不定方程$x^n+y^n=z^n(n\geqslant 3)$无非零整数解时，首创了无穷递降法，我们将应用这一方法证明本文中的重要定理，即N极点可达性定理，及流传甚广的，尚未获证的所谓x+1角谷定理(猜想)。

定理1 对整数点集Vc中的任意点$A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$总可以经过有限次的变换，而得到Vc中的一个N极点。

证明：如果点A就是Vc的一个N极点，则可以认为结论已成立，如果点A不是Vc的N极点，那么对点A连续施行若干次变换，可得到Vc中的点列，

$$A、A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots \tag{4}$$

式中从第2点A_1起，每一点都是它前面相邻的点经过一次变换得到的。

令函数$Q(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$， 构作数列

$$Q(A),Q(A_1),Q(A_2),\cdots,Q(A_k),\cdots \tag{5}$$

易知这是一个严格递减的正整数列，因此它不可能是无穷的，因此点列(4)也必是有限的，设A_k是该点列中的最末一点，它当然是Vc中的一个N极点，即对

收稿日期：2004-03-17
作者简介：邓继林，男，讲师。

于点A总可以经过有限次的变换，而得到点集Vc中的一个N极点。

定理2　设n维整数点集Vc中的任一S极点B，及任一点$A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，那么总可以对B施行有限次适当的变换，将其变为点A。

证明：不妨设点B的最后一个分量为C，(推出)其余的分量全等于0，又点A的分量$a_1,a_2,\cdots,a_n$是递增顺序的，即$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$。连续对B作变换，可得

$$B(0,0,\cdots,c)$$
$$\to B_1(a_1,0,\cdots,c-a_1)$$
$$\to B_2(a_1,a_2,\cdots,c-a_1-a_2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\to B_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

B、B_1、B_2、…、B_n显然都是点集Vc中的点，最后的那点B_n就是Vc中的已知点A。

对于正整数a，如果a是偶数，则将它除以2，若a是奇数，则加上1，这称为是对正整数a的一次运算。

定理(x+1)，任一正整数a，都可以经过有限次运算，而得到正整数1。

证明：当$a_0=1,2,3$时，其结论是显然的，当$a_0>3$时，对它连续作上述的运算若干次，可得到正整数列

$$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots \tag{6}$$

此数列从第2项a_1起，每一项都是它前面相邻项经过一次运算得到的，我们只须证明这个数列中必有某项$a_\ell=1,2,3$即可，(反证法)如果数列(6)中各项均大于3，即$a_k>3,k=0,1,2,\cdots$根据运算的定义可列出下表。

a_k	a_{k+1}	a_{k+2}	a_k-a_{k+2}
4m	2m	m	3m
4m+1	4m+2	2m+1	2m
4m+2	2m+1	2m+2	2m
4m+3	4m+4	2m+2	2m+1

(7)

由此推出　$a_k>a_{k+2},k=0,1,2,\cdots$　(8)

由此可得到数列(6)的无穷子数列

$$a_0,a_2,a_4,\cdots,a_{2k},\cdots \tag{9}$$

这是一个严格递减的正整数无穷数列，此为矛盾，因此数列(6)中必有某项$a_\ell\leqslant3$，即$a_\ell=1,2,3$，因此角谷定理(x+1)对于任意的正整数a都是成立的。

顺便指出角谷定理5x+1是不成立的，如当a=17时，按5x+1运算的定义，可得

17，86，43，216，108，54，27

136，68，34，17，…，循环！　(10)

数列(10)中显然不存在正整数1。

二　一类多元整数变量的对称函数的最小值及最大值

设整数点集Vc的全部N极点是$P_1,P_2,\cdots,P_\eta$全部S极点是$Q_1,Q_2,\cdots,Q_\tau$，若g(x)是定义在点Vc上的n元对称函数，于是显然有

$$g(P_1)=g(P_2)=\cdots=g(P_\eta) \tag{11}$$
$$g(Q_1)=g(Q_2)=\cdots=g(Q_\tau) \tag{12}$$

由于n维整数点集Vc是有限点集，它是由$\binom{n+c-1}{c}$个点组成的，因此任何定义在点集Vc上的n元函数(不一定是对称的)g(x)，在Vc上都存在最小值及最大值。

定理3　设点集Vc中的任意点$A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$经一次变换，得到的点是$B(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，两点P、Q分别是Vc的任一N极点和S极点，n元整数变量的对称函数f(x)的定义域是n维整数点集Vc，那么

i.当$f(A)\geqslant f(B)$成立时，函数f(x)在点P处取最小值f(P)，在点Q处取最大值f(Q)。

ii.当$f(A)\leqslant f(B)$成立时，函数f(x)在点Q处取最小值f(Q)，在点P处取最大值f(P)。

证明：①对于任意的n维整数点$X\in Vc$，由定理1知，可对点X施行有限次的变换，得到一个N极点P_i，即有

$$X\to X_1\to X_2\to\cdots\cdots\to X_k(=P_i) \tag{13}$$

n元函数f(X)是对称的，又由已知i的条件，推出

$$f(X)\geqslant f(X_2)\geqslant f(X_3)\geqslant\cdots\geqslant f(X_k)=f(P) \tag{14}$$

这表明点集Vc中的全部N极点都是函数f(X)取最小值的点，即函数f(X)在任意的N极点P处取最小值f(P)，同样地可以证明，数f(X)在任意的S极点Q处都取得最大值f(Q)，综上所述可知，结论i成立。

②类似地可以证明，结论ii也成立。

例1，下列各n元对称多项式函数，称为是n元基本对称多项式，如果它们的定义域都是点集Vc，求它们的最大值及最小值。

$$\sigma_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\quad k=1,2,\cdots n$$

(15)　它是变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一切k组合乘积之和。

解：对于$\forall X(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in Vc$，如果X不是Vc的N极点，不妨假设有分量$x_1,x_2$使得$|x_1-x_2|>1$,

令 $x'_1=x_1-\ell \quad x'_2=x_2+\ell \quad x'_i=x_i \quad i=3,\cdots,n$。 式中 $0<2\ell<x_1-x_2$ 作变换$X\to X'(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$作计算。

$$\sigma_k(X)-\sigma_k(X')=\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}-\sum x'_{i_1}x'_{i_2}\cdots x'_{i_k}$$
$$=(x_1x_2\sigma_{k-2}(x_3,\cdots,x_n)+(x_1+x_2)\sigma_{k-1}(x_3,\cdots,x_n)+\sigma_k(x_3,\cdots,x_n))$$
$$-(x'_1x'_2\sigma_{k-2}(x'_1,\cdots,x'_n)+(x'_1+x'_2)\sigma_{k-1}(x'_3,\cdots,x'_n)+\sigma_k(x'_3,\cdots,x'_n))$$
$$=-\ell((x_1-x_2)-\ell)\sigma_{k-2}(x'_3,\cdots,x'_n)\leqslant 0$$

即有 $\sigma_k(X)\leqslant\sigma_k(X') \quad k=1,2,\cdots,n$ (16)

由此并根据定理3、ii知，$\sigma_k(X)$在任意的N极点P处取得最大值$\sigma_k(P)$，在任意的 S 极点 Q 处取最小值$\sigma_k(Q)$， $k=1,2,\cdots,n$。

当$k=1$时，基本对称多项式$\sigma_1(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i$，它的最大值 $\sigma_1(P)$，与最小值 $\sigma_1(Q)$相等，它们都等于常数C，当$k>1$时，直接计算可知，基本对称多项式$\sigma_k(X)$的最大值$\sigma_k(P)=\sum_{i\geqslant 0}C_r^jC_{n-r}^{k-i}q^{k-i}(q+1)^j$ 最小值是

$\sigma_k(Q)=0$。

例2 :设定义在整数点集Vc上的4元对称多项式函数，$f(X)=f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum x_{i1}^2x_{i2}x_{i3}$ (17)

求这个函数的最小值及最大值

解 :由已知可得

$$f(X)=f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum x_{i1}^2x_{i2}x_{i3}$$
$$=x_1^2x_2x_3+x_2^2x_1x_3+x_3^2x_1x_2+x_4^2x_1x_2+x_1^2x_2x_4+x_2^2x_1x_4$$
$$+x_3^2x_1x_4+x_4^2x_1x_3+x_1^2x_3x_4+x_2^2x_3x_4+x_3^2x_2x_4+x_4^2x_2x_3$$
$$=x_1x_2((x_3-x_4)^2+(x_1+x_2)(x_3+x_4))$$
$$+(x_1+x_2)x_3x_4(x_1+x_2+x_3+x_4) \qquad (18)$$

对于$\forall X(x_1,x_2,x_3,x_4)\leqslant Vc$，如果不是点集Vc中的N极点，不防假设有 $x_1-x_2>1$，令$x'_1=x_1-\ell$，$x'_2=x_2+\ell$，$x'_3=x_3$，$x'_4=x_4$，式中$0<2\ell\leqslant x_1-x_2$，作变换

$X\to X'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)$

即得
$$f(X)-f(X')=\sum x_{i_1}^2x_{i_2}x_{i_3}-\sum x'^2_{i_1}x'_{i_2}x'_{i_3}$$
$$=(x_1x_2-x'_1x'_2)x_3x_4(x_1+x_2+x_3+x_4)$$
$$=-c\ell[(x_1-x_2)-\ell]x_3x_4\leqslant 0$$

因此推出 $f(X)\leqslant f(X')$ (19)

由定理4.ii知，函数f(X)在点集Vc的任一N极点P处，都取得最大值f(P)，而在任意的S极点Q处，都取得最小值f(Q)。

例3 :设下列n元整数变量的对称函数，它们的定义域都是n维整数点集Vc。

$$f_1(X)=x_1!x_2!\cdots x_n! \qquad (20)$$

$$f_1(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i! \qquad (21)$$

求它们的最小值及最大值。

解 :对于$\forall X(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in Vc$，如果X不是N极点，不妨假设有 $x_1-x_2>1$， 令$x'_1=x_1-\ell$， $x'_2=x_2+\ell$，$x'_i=x_i$，$i=3,\cdots,n$，$0<2\ell\leqslant x_1-x_2$，由此推出$x'_1\geqslant x'_2$，作变换

$X\to X'(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$计算

$$\frac{f(X)}{f(X')}=\frac{x_1!x_2!\cdots x_n!}{x'_1!x'_2!\cdots x'_n!}=\frac{x_1!x_2!}{x'_1!x'_2!}=\frac{x_1!x_2!}{(x_1-\ell)!(x_2+\ell)!}$$
$$=\frac{x_1(x-1)\cdots(x_1-\ell+1)}{(x_2+\ell)\cdots(x_2+1)}>1$$

由此推出 $f_1(X)>f_1(X')$ (22)

$$f_2(X)-f_2(X')=(x_1!+x_2!)-(x'_1!+x'_2!)$$
$$=[(x'_1+\ell)\cdots(x'_1+1)x'_1!+x'_2!]-(x'_1!+x'_2!)$$
$$>(2x'_1!+x'_2!)-(x'_1!+x'_1!)>0$$

由此推出 :$f_2(X)>f_2(X')$ (23)

由定理3.i推出，函数 $f_1(X)$，$f_2(X)$在任意的N极点P处，分别取得最小值 $f_1(P)$，$f_2(P)$，在任意的S极点Q处，分别取得最大值 $f_1(Q)$，$f_2(Q)$，它们都等于c !。

三 一类特殊的n元对称函数的最小值

令$\varphi(x)$是整数变量x的一元函数。

$$f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i) \qquad (24)$$

是整数变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$的n元函数，显然f(X)是对称的，如果它的定义域是n维整数点集Vc，如前所述，这个函数存在最小值和最大值。

定理4 设$g(t)=\varphi(a-t)+\varphi(b+t)$ (25)

是整数变量t的函数，$0\leqslant 2t\leqslant a-b$式中a、b是非负的整数常数，且$0\leqslant b\leqslant a\leqslant a+b\leqslant c$，那么

i.如果g(t)是递减函数，那么函数f(X)在任意的N极点P处，取得最小值f(P)，在任意的S极点Q处，取得最大值f(Q)。

ii.如果g(t)是递增函数，那么函数f(X)在任意的S极点Q处，取得最小值f(Q)，在任意的N极点P处，取得最大值f(P)。

推论 设$\varphi(t)$是连续变量t的2阶可微分函数，其余条件与定理4相同，那么

i.当$\varphi''(t)\geqslant 0\ (0<t<c)$时，函数f(X)在任意的N极点P处，取得最小值f(P)，在任意的S极点Q处，取得最大值f(Q)。

(下转107页)

1、将原问题转化为：$\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left|x-\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right|\right\}$，$\frac{\beta_i}{\alpha_i}\leqslant\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}$，$i=1,2,\cdots,n-1$；其中$\alpha_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$。

2、计算$\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$；

3、求出α_k使得$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k<\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$…………(1)

且$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1}\geqslant\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$…………(2)

4、①当式(2)中等号不成立时，$x=\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}}$，为$F(x)$唯一的最小值点。

当式(2)中等号成立时，$\forall x\in\left[\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}},\frac{\beta_{k+2}}{\alpha_{k+2}}\right]$均为$F(x)$的一个最小值点。

三、应用举例

例1：设x为实数，且$F(x)=|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|+|x+5|$，求$F(x)$的最小值。

解：

整理得$F(x)=|x-(-5)|+|x-(-4)|+|x-(-3)|+|x-(-2)|+|x-(-1)|$

易知$k=2$，$\alpha_3=1$，$\beta_3=-3$，$\frac{\beta_3}{\alpha_3}=-3$，$\min F(x)=F(-3)=6$

例2：设x为实数，且$F(x)=|2x+1|+|3x+3|+|x-2|+6$，求$F(x)$的最小值。

解：

整理得$F(x)=3|x-(-1)|+2|x-(-1/2)||x-2|+6$

易知$\min F(x)=F(-1)=10$，且$\min F(x)=F(t)=10$，$t\in[-1,-\frac{1}{2}]$

例3：设x为实数，且$F(x)=|\sqrt{2}x+1|+|3x+3|+|x-2|+6$，求$F(x)$的最小值。

解：

整理得$F(x)=3|x-(-1)|+\sqrt{2}|x-(-1/\sqrt{2})|+|x-2|+6$

易知$\min F(x)=F(-1)=10-\sqrt{2}$

注释与参考文献：

〔1〕华东师范大学数学系编.数学分析（上册）〔M〕.高等教育出版社

（上接104页）　ii.当$\varphi''(t)\leqslant0\ (0<t<c)$时，函数$f(X)$在任意的S极点Q处，取得最小值$f(Q)$，在任意的N极点P处，取得最大值$f(P)$。

本节中的定理，及其推论都是定理3的直接结果，因此其详细证明略。

例4：设下列整数变量的n元对称函数，它们的定义域都是n维整数点集Vc。

$$f_1(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\qquad\alpha>0\qquad(26)$$

$$f_2(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i^3}\qquad(27)$$

求它们的最小值，及最大值。

解：①设$\varphi_1(t)=t^{\alpha}$是连续变量t的函数，当$\alpha=1$时，显然有$\varphi''_1(t)=0$，由此及推论i、ii可知函数$f_1(X)$在任意的N极点P处，及任意的S极点Q处的取值既是最小值，也是最大值，这一结论容易直接验证。

设$\alpha\neq1$，可得$\varphi''_1(t)=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}\quad 0<t<c$

当$\alpha>1$时，推出$\varphi''_1(t)>0$，此时函数$f_1(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}$在任意的N极点P处，取最小值$f_1(P)$，在任意的S极点Q处，取最大值$f_1(Q)$，当$0<\alpha<1$时推出$\varphi''_1(t)<0$，此时函数$f_1(X)$在任意的S极点Q处，取得最小值$f_1(Q)$，在任意的N极点P处，取最大值$f_1(P)$。

②设$\varphi_2(t)=\frac{1}{1+t^3}$是连续变量t的函数，它的2阶导数$\varphi''_2(t)=\frac{6(2t^4-t)}{(t^3+1)^3}\geqslant0\ (0\leqslant t\leqslant c)$，因此整数变量的n元对称函数$f_2(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i^3}$在任意的N极点P处取最小值，在S极点Q处取最大值。

注释及参考文献：

〔1〕邓继林.一个离散数学问题〔J〕.西昌师范高等专科学校学报，2003，2

〔2〕邓继林.多项式系数的几条性质〔J〕.西昌师范高等专科学校学报，2004，1