DOI:10.16104/j.issn.1673-1883.2004.01.020

第16卷第1期 西昌师范高等专科学校学报 Vol.16,No.1
2004年3月 Journal of Xichang Teachers College Mar., 2004

多项式系数的几条性质

邓继林

(西昌学院〈南校区〉数学系,四川 西昌 615022)

【摘 要】本文利用整数的带余除法定理,推出了多项和的乘方展开式的最大系数的计算公式,及其重要性质。

【关键词】多项式定理;最大系数;项数;整数的带余除法;整除

【中图分类号】O15 【文献标识码】A 【文章编号】1008-6307(2004)01-0069-01

定理(多项式定理),设$x_1,x_2,\cdots,x_k$是k个不同的文字,n,k是任意两个正整数,则有:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=n\\ n_i\geq 0,i=1,2,\cdots,k}}\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}\qquad(1)$$

为方便起见,我们将上式中项$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$的系数记作$c(n_1,n_2,\cdots,n_k)$,即有

$$c(n_1,n_2,\cdots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}\qquad(2)$$

它的值是正整数。

对于上述的两个正整数,根据整数的带余除法定理可知,有唯一的一对非负的整数q、r,使得

$$n=kq+r\qquad 0\leq r<k\qquad(3)$$

定理1 展开式(1)中的最大系数是

$$c=\frac{n!}{q_1!\ q_2!\ \cdots q_k!}\qquad(4)$$

式中数组$q_1,q_2,\cdots,q_k$是由k-r个非负的整数q及r个正整数q+1组成的。

易见c是一个正整数,且$c=c(q_1,q_2,\cdots,q_k)$,而$q_1,q_2,\cdots,q_k$是k个非负的整数,不失一般性,不妨假设$q_1\leq q_2\leq\cdots\leq q_k$。

证明:假设$c(n_1,n_2,\cdots,n_k)$是展开式(1)中的任意一项的系数,并且$n_1\leq n_2\leq\cdots\leq n_k$。

当系数$c(n_1,n_2,\cdots,n_k)\neq c$时,可以推出有序数组

$$(n_1,n_2,\cdots,n_k)\neq(q_1,q_2,\cdots,q_k)\qquad(5)$$

构作符号序列$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k$ (6)

式中$\delta_i=\mathrm{sgn}(q_i-n_i)\quad i=1,2,\cdots,k$

设两个整数s,t满足不等式$1\leq s<t\leq k$作运算

$$(q_t-n_t)-(q_s-n_s)=(q_t-q_s)-(n_t-n_s)\leq 1-0=1\qquad(7)$$

这表明在序列(6)中-1不能排在+1的前面,又显然有$\sum_{i=1}^{k}(q_i-n_i)=0$,并由(5)式推出,序列(6)中,+1,-1都确实各有若干个(都不可能是0个!),由此即得

$$\lambda=c^{-1}c(n_1,n_2\cdots n_k)=\frac{q_1!\ q_2!\ \cdots q_k!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}=\frac{\prod\limits_{\delta_i=+1}(n_i+1)\cdots q_i}{\prod\limits_{\delta_i=-1}(q_i+1)\cdots n_i}\qquad(8)$$

上式分子中的各因数均小于分母中的各因数,并且分子和分母中所含的因数个数之差是

$$\sum_{\delta_i=+1}(q_i-n_i)+\sum_{\delta_i=-1}(q_i-n_i)=\sum_{t=1}^{k}(q_t-n_t)=0$$

因此分子和分母的因数个数也是相等的,由此推出$0<\lambda<1$,即得

$$c(n_1,n_2,\cdots,n_k)=\lambda c<c\qquad(9)$$

成立,又c显然是(1)式中项$x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_k^{q_k}$的系数,因此它当然是(1)式中的最大系数。

定理2 展开式(1)中的系数取最大值的项的个数是C_k^r。

证明:展开式(1)中项$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$的系数取最大值的充分且必要的条件由定理1知,是$n_1,n_2,\cdots,n_k$是k-r个元素a(=q),及r个元素b(=q+1)的一个排列,而这样不同的排列共有C_k^r个, (下转80页)

收稿日期:2003-12-09

作者简介:邓继林(1948—),男,西昌学院(南校区)数学系讲师。

的基因型是什么？

胚和胚乳的基因型分析及结果如下：

正交：♀ Aabb×♂aaBb

↓ ↓

配子： Ab或ab aB或ab

子代胚及胚乳的基因型如下表：

胚 精子＼卵细胞	Ab	ab
aB	AaBb	aaBb
ab	Aabb	aabb

胚乳 精子＼极核	两个极核Ab、Ab	两个极核ab、ab
aB	AAaBbb	aaaBbb
ab	AAabbb	aaabbb

种皮和果皮的基因型与母本同为Aabb。

反交：♀ aaBb×♂Aabb

↓ ↓

配子： aB或ab Ab或ab

胚 精子＼卵细胞	aB	ab
Ab	AaBb	Aabb
ab	aaBb	aabb

胚乳 精子＼极核	两个极核aB、aB	两个极核ab、ab
Ab	AaaBBb	Aaabbb
ab	aaaBBb	aaabbb

种皮和果皮的基因型与母本同为aaBb。

（上接69页） 因此展开式(1)中系数取最大值的项恰有C_k^r个。

定理3 式(1)是C_{k+n-1}^n个不同项的和。

证明，显然(1)式所含有的不同项的个数恰是不定方程$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ (10)

所有的非负的整数解的个数，即是C_{k+n-1}^n。

在前面所述的条件下，有下面的定理：

定理4 设c是展开式(1)中的一个最大系数，则有$(k-r)!\ r!\mid c$

证明：设集合$A=\{1,2,\cdots,n\}$是由n个元素组成的，将它分成k个互不相交的，并且是不分顺序的（或说是没有编号的）子集，使得恰含有q个元素的子集共有k-r个，恰含有q+1个元素的子集共有r个，这样的所有不同的分法种数当然是一个正整数，它是

$$\mu=\frac{n!}{(q!)^{k-r}((q+1)!)^{r}(k-r)!\ r!}$$

由此即得 $$C=\frac{r!}{(q!)^{k-r}((q+1)!)^{r}}=(k-r)!\ r!\ \mu$$

即是 $(k-r)!\ r!\mid c$

推论：如果非负的整数组$n_1,n_2,\cdots,n_k$满足方程

$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ (11)

则积$n_1!\,n_2!\cdots n_k!$取最小值的充分且必要的条件是，整数组$n_1,n_2,\cdots,n_k$是由k-r个非负的整数q，及r个正整数q+1组成的。

但有趣的是，同样的条件却是积$n_1n_2\cdots n_k$取最大值的充分且必要的条件。

注释及参考文献：

〔1〕邓继林.一个离散数学问题〔J〕.西昌师专学报，2003,2.

〔2〕〔美〕W·H拜尔.荣现志等译.标准数学手册〔Z〕.化工出版社，1988.