DOI:10.16104/j.issn.1673-1883.2004.04.043
第16卷第4期 西昌师范高等专科学校学报 Vol.16,No.4
2004年12月 Journal of Xichang Teachers College Dec., 2004

用二项式分布解析理想气体平衡态

廖 旭

（西南科技大学 理学院，四川 绵阳 621000）

【摘 要】本文从随机理论中的二项式分布出发，定量的分析了孤立系统中理想气体的最可几分布——理想气体的热平衡态，同时给出偏差与相对偏差。

【关键词】二项式；定量分析；平衡态；偏差；相对偏差

【中图分类号】O414.21 【文献标识码】A 【文章编号】1008-6307(2004)04-0139-02

Equilibrium State Analysing of Perfet Gas by Asing Binomial Distribution

LIAO Xu

(*Department of Nature Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621000, Sichuan*)

Abstract: Starting from the binomaial distribution in the random theory, this paper analyzed rationally the most distribution possibility — the hot Equilibrium state of perfect gas in separate system and simultaneously presented the deviation and relative deviation.

Key word: Binomial rational analysis Equilibrium state deviation relative deviation

对热平衡态的讨论，在大学物理教学过程中，一般仅作定性分析，这里，我们从随机理论中的二项式分布出发，对热平衡态进行定量的研究，同时给出偏差与相对偏差，无疑，这对认识热运动及其规律具有积极的意义。

一、二项式分布

我们以气体分子的分布为例来引入二项式分布。设由N个理想气体分子组成的体系，置于体积为V的容器中，在体积V中任取一体积元△V。为叙述方便，我们把体积元△V称为A，把体积V-△V称为B。

在经典物理中，我们可以把N个分子都编上号1,2,3,…N，以识别和区分它们。根据统计物理中的等几率假设，任何一个分子在容器中任何地方单位体积内出现的几率都相同。因此，任何一个分子出现在A的几率P必然和其体积△V成正比，出现在B的几率q与体积V-△V成正比，考虑到每个分子在V内出现的几率为1（归一性），即p+q+1，所以可令：

$$p=\frac{\triangle V}{V} \qquad q=\frac{V-\triangle V}{V} \qquad (1)$$

因为每个分子的运动是独立的，所以，对于指定的n个分子出现在A的几率为

$$W_A=P^n \qquad (2)$$

同理，对于指定的N-n个分子出现在B的几率为

$$W_B=q^{N-n} \qquad (3)$$

那么，同时让n个指定的分子出现在A，让N-n个指定的分子出现在B的几率为

$$W_{AB}=P^n q^{N-n} \qquad (4)$$

由于各个分子都是可以识别的，因此调换A、B中的任一对分子，仍对应同一种分布，显然，A、B两部分所有可以交换的分子对的数目（保持分布不变）为：

$$\frac{N!}{N_A!N_B!}=\frac{N!}{n!(N-n)!} \qquad (5)$$

即，对于一种分布（A中有n个分子，B有N-n个分子），

收稿日期：2004-08-06

作者简介：廖 旭(1961-)，男，副教授，从事大学物理及理论物理的教学与研究。

它还具有$\frac{N!}{n!(N-n)!}$种不同分配方式，所以该分布(n,N−n)的出现几率W_n为：

$$W_n=\frac{N!}{n!(N-n)!}P^n q^{N-n} \qquad (6)$$

由于(6)式正好是二项式$(p+q)^N=\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{n!(N-n)!}P^n q^{N-n}$展开式的通项，故称为二项式分布。

二、理想气体的平衡态

在(6)式中，W_n的极大值所对应的分 我为最可几分布，它由$\frac{dW_n}{dn}=0$求得，也可以由$\frac{d1nW_n}{dn}=0$更方便地求出。

将(6)式取对数得：

$$1nW_n=1nN!-1nn!-1n(N-n)!+n1np+(N-n)1nq \qquad (7)$$

因为N,n都很大，所以可用斯特令公式

$$1nn!\approx n(1nn-1) \qquad (8)$$

代入(7)式得：

$$1nW_n=1nN!-n(1nn-1)-(N-n)[1n(N-n)-1]+n1np+(N-n)1nq$$

上式对n求导数并令其为0

$$\frac{d1nW_n}{dn}=-1nn+1n(N-n)+1nq=0$$

得：$\frac{n}{N-n}=\frac{p}{q}=\frac{p}{1-p}\Rightarrow n=Np \qquad (9)$

因为 $p=\frac{\triangle V}{V}$ 代入(9)式得

$$\frac{n}{\triangle V}=\frac{N}{V} \qquad (10)$$

(10)式表示：当A中的分子数密度$\frac{n}{\triangle V}$等于容器中的平均分子数密度$\frac{N}{V}$时，对应的分布出现的几率最大。因为A的划分是任意的，所以这就表示：当容器中各部分的分子数密度等于平均分子数密度时(平衡态)，这种分配方式出现的几率最大，即最可几分布对应理想气体的平衡态。

三、偏差与相对偏差

由于分子在作无规则热运动，所以容器中任一体积△V中的分子数n是涨落不定的，在任一时刻去看，由于分子的跑进跑出绝不会正好相等，所以其中的分子数n或多或少与平均值$\bar{n}$（体积△V中的分子数n的平均值）有偏离。因为$\triangle n=n-\bar{n}$的平均值

$$\overline{\triangle n}=\overline{(n-\bar{n})}=0 \qquad (11)$$

所以我们用$\overline{\triangle n^2}$来表示n与$\bar{n}$的偏差

$$\overline{\triangle n^2}=\overline{(n-\bar{n})^2}=\overline{n^2}-\bar{n}^2 \qquad (12)$$

为了求出$\overline{\triangle n^2}$，我们将(6)式的对数$1nW_n$在$n=\bar{n}$处展开，得

$$1nW_n=1nW(\bar{n})+\left[\frac{d1nW_n}{dn}\right]_{n=\bar{n}}\cdot(n-\bar{n})$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2 1nW_n}{dn^2}\right]_{n=\bar{n}}\cdot(n-\bar{n})^2$$
$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{d^3 1nW_n}{dn^3}\right]_{n=\bar{n}}\cdot(n-\bar{n})^3+\cdots \qquad (13)$$

因为 $\left[\frac{d1nW_n}{dn}\right]_{n=\bar{n}}=0$

$$\left[\frac{d^2 1nW_n}{dn^2}\right]_{n=\bar{n}}=\left[\frac{-N}{n(N-n)}\right]_{n=\bar{n}}=-\frac{1}{Npq}$$

$$\left[\frac{d^3 1nW_n}{dn^3}\right]_{n=\bar{n}}=\frac{1-2p}{N^2P^2(1-P^2)}$$

当$\bar{n}=Np>>1$，$\left[\frac{d^3 1nW_n}{dn^3}\right]_{n=\bar{n}}=\frac{1-2p}{N^2P^2(1-P^2)}\to 0$

所以，由(13)式得

$$W_n=W(\bar{n})\exp\left[-\frac{(n-\bar{n})^2}{2Npq}\right] \qquad (14)$$

项n很大时，W_n随n的变化可看成连续的，其归一化条件可用积分表示，即

$$\int_0^\infty w(n)exp\left[-\frac{(n-\bar{n})^2}{2Npq}\right]\cdot dn=1 \qquad (15)$$

上式积分的上限改为∞，是因为当$n\to\infty$时，积分函数早已趋向零。

由(15)式可得

$$W(\bar{n})=\frac{1}{\sqrt{2Npq}} \qquad (16)$$

$W(\bar{n})$为分布函数W_n的极大值。这样就得到W_n在满足归一化条件下的表示式：

$$W_n=\frac{1}{\sqrt{2Npq}}exp\left[-\frac{(n-\bar{n})^2}{2Npq}\right] \qquad (17)$$

（下转144页）

立的这些管理制度，一要落实，二要保证它的严肃性，有章可循。这是教育执行力达成的基本因素。

在一般情况下，学校工作组织与管理的设计起点主要方在教职员工的工作业绩方面，教育教学业绩出色，就理应得到比较多的奖赏，反之，则表现为一种惩罚。

在执行过程中，教职员工、战略、运营这三个核心流程是紧密联系在一起的，而在实际操作方面，这三者却并非如此，而大都是在一定程度上被割裂开来。于是，就出现了这样的情况:学校之间的规章制度大都是一样的，制订的管理策略也可以说是尽善尽美，都有比较详尽的、与事实对应的操作条文，然而，最终的结果却是很不一致的，出现了优质学校与薄弱学校的区别，有差班与优胜班级的不同称谓，有优秀学生与差生的等级之分。原因在哪里呢？在于教育执行力的差异，在于教育执行力文化建构的完整程度。

关于结构与秩序的解读。建构主义发展观认为，教育对象的成长在根本上源于自身的潜力，在于内因的作用，它具有自主、向上、能动等属性。但是，这些属性必须经过适宜的组织与管理，借助外因的驱动作用，建立起有序的结构和秩序，在有准备的环境的交互作用下，走向成长。这就是我们所实践的关于建构教育执行力文化、关于有效执行过程的组织设计因素的理论基础。

教育执行力文化，其全部的内涵和外延就建立在与它密切相关的结构与秩序的基础上。一所学校、一个班级，其教育教学管理的执行，如果缺失了自身应有的结构和秩序，则有序的设计组织、有效的管理都成为了一句没有实际意义的空话，学校在处于任何逆境情况下都难以克服一连串的环境阻碍而获得发展的机会，在顺境时也不会有际遇突发变更的准备，领导者的教育眼光是短视的，教育视野是狭窄的，学校也难以有可持续性发展。这是教育执行力文化在不同情境中的反映，即是说，教育执行力文化不仅是结构和秩序的基本内涵，更是一种教育可持续发展的至高境界。

（上接140页）

由式（17）式我们可以看到，当$\triangle V$中的分子数n偏离平衡态较大时，几率很快减少。所以，对于孤立系统中的理想气体，空间分子数密度不等于平均分子数那种状态并不是不会出现，只是出现的几率比平均分布少得多罢了。

由（17）式，很容易求出偏差

$$\overline{\triangle n^2}=\int_0^\infty (n-\bar{n})^2 \cdot W_n \cdot dn=Npq \qquad (18)$$

相对偏差

$$\frac{\sqrt{\overline{\triangle n^2}}}{\bar{n}}=\frac{\sqrt{Npq}}{Np}=\frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{Np}} \qquad (19)$$

随N增大而减少。

注释及参考文献：

〔1〕赵凯华，罗蔚茵.热爱.高等教育出版社。

〔2〕F·瑞夫.统计物理学.伯克利物理教程（第五卷）.科学出版社。

〔3〕D·哈里德，R·瑞斯尼克.物理学.科学出版社。