DOI:10.16104/j.issn.1673-1883.2004.04.042
第16卷第4期 西昌师范高等专科学校学报 Vol.16,No.4
2004年12月 Journal of Xichang Teachers College Dec., 2004

用高等数学证明不等式的若干种方法

叶 殷， 何志树

（西昌学院 数理系，四川 西昌 615022）

【摘 要】不等式是数学中不可缺少的工具之一，有许多不等式在数学研究中有着重要的作用，但用初等数学知识证明一些不等式比较困难。本文利用高等数学的原理和方法，就不等式的证明给出几种证法 。

【关键词】不等式；证明方法

【中图分类号】O13 【文献标识码】B 【文章编号】1008-6307(2004)04-0136-03

Some Ways to Ttestify Inequation with Methods in Higher Mmathematics

YE Yin， HE zhi-shu

(*Xichang College, Xichang 615022, Sichuan*)

Abstract: Inequation is one of the tools in mathematics which is indispensable. Much of the inequation play an important roles in the research on mathematics. While it is a little difficult to use elementary mathematics to testify some inequation. The essay, with the help of principles and methods in higher mathematics ,show some ways to testify inequation.

Key word: inequation；the ways of testify

在讲授高等数学过程中，如何将高等数学的原理和方法运用于初等数学，如何解决高等数学与中学数学脱节的现象，是高等院校在数学教学中需要探讨解决的问题之一。

许多初等数学中的问题，往往蕴含着数学中的较高层次理论的再实践的问题。如能在教学中有意将高等数学的原理、方法应用于一些初等数学的证明、计算，不仅可以开拓学生的视野，而且可使学生体会到用高等数学的原理、方法解决初等数学问题时，居高临下，驾轻驭熟的感觉，进而了解高等数学与初等数学密不可分的关系。

例如：不等式是数学中不可缺少的工具之一，有许多不等式在数学研究中有着重要的作用。但用初等数学知识证明一些不等式比较困难，下面利用高等数学的原理和方法，就不等式的证明给出几种证法。

一、利用函数的单调性证明不等式

我们知道对定义在区间(a,b)内的函数$f(x)$，若$f'(x)>0$(或$f'(x)<0$)，则函数$f(x)$ 在(a,b)内严格增加(或严格减少)。根据函数的单调性，可证明不等式。

例1 证明不等式$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$，(其中$x>0$)

证明：先证：$\ln(1+x)<x$.

设$f(x)=x-\ln(1+x)$，则$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0\ (x>0)$，$\therefore f(x)$单调增加，又$\because f(0)=0$，$\therefore$当$x>0$时，$f(x)>0$，即：$\ln(1+x)<x$.

再证：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$

设$f(x)=\ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2})$，则$f(0)=0$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}$

收稿日期：2004-11-16

作者简介：叶殷(1961-)，男，副教授。

$-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}>0(x>0)\therefore$当$x>0$时，$f(x)>0$，即：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$

二、利用微分中值定理证明不等式

拉格朗日中值定理：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，其中$\xi\in(a,b)$。

下面用中值定理再证例1

证明：先证：$\ln(1+x)<x$.

设$g(t)=\ln(1+t)$，考虑区间$[0,x]$，显然$g(t)$在$[0,x]$上连续，在$(0,x)$内可导，由拉格朗日中值定理得：$\ln(1+x)-\ln(1+0)=\frac{1}{1+\xi}(x-0)$即：$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$ $(\xi\in 0,x))$

将ξ换成0得：$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}<x$ 即：$\ln(1+x)<x$。

三、利用泰勒公式证明不等式：

若函数$f(x)$在$[a,b]$上存在连续n+1阶导数，则$\forall x\in[a,b]$有泰勒公式：

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$其中：

$\xi\in(a,x)$，当$a=0$，该公式称为马克劳林公式，即：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$，其中$\xi\in(0,x)$，下面用马克劳林公式再证明例1

证明：设$f(x)=\ln(1+x)$，由一阶马克劳林公式有：

$$\ln(1+x)=\ln 1+\frac{1}{1+0}x+\frac{1}{2!}\frac{-1}{(1+\xi)^2}x^2\quad(\xi\in(0,x))$$

$\therefore\ln(1+x)<x$

再由二阶马克劳林公式有：

$$\ln(1+x)=\ln 1+\frac{1}{1+0}x+\frac{1}{2!}\frac{-1}{(1+0)^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{(1+\xi)^3}x^3,$$

其中$\xi\in(0,x)$

$$\therefore\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$$

从而：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$，(其中$x>0$)

四、利用函数的极值证明不等式：

利用函数的极值证明不等式，是先由不等式构造辅助函数，找出函数的极值点，然后由极值得不等式。

例2　证明：当$x\in[0,1]$时，有不等式$\frac{1}{2^{p-1}}\leq x^p+(1-x)^p\leq 1$ 其中$p\geq 1$ 为实数

证明：设$f(x)=x^p+(1-x)^p$，则$f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$，令$f'(x)=0$得$x=\frac{1}{2}$当$x\in[0,\frac{1}{2})$时，$f'(x)<0$，当$x\in(\frac{1}{2},1]$时，$f'(x)>0$　$\therefore x=\frac{1}{2}$为$f(x)$的极小值点，又因f(0)=f(1)=1

$\therefore x=\frac{1}{2}$为f(x)的最小值点，$x=0$，$x=1$为$f(x)$的最大值点，

$\therefore\frac{1}{2^{p-1}}=f(\frac{1}{2})\leq x^p+(1-x)^p\leq f(1)=1$

五、利用函数的凸性证明不等式。

凸函数是一类特殊函数，其定义为：

定义在区间$[a,b]$上的函数$f(x)$下为下凸（上凸）的是指：对于任意的$x_1,x_2\in[a,b]$ 及任何满足$\lambda_1+\lambda_2=1$的非负实数λ_1,λ_2有：

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)\ (f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\geq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2))$$

由定义及数学归纳法可得下面结论：

若$f(x)$为区间$[a,b]$上的下凸（上凸）函数，则对$[a,b]$内任意n个点$x_1,x_2,\cdots,x_n$及满足$\sum_{i=1}^{n}\lambda i=1$的实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$有下面不等式：

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_1x_1)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_1f(x_1)\qquad(f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_1x_1)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_1f(x_1))$$

命题：如果$f(x)$在(a,b)内存在二阶导数$f''(x)$，若对任意$x\in(a,b)$有$f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$，则函数$f(x)$在(a,b)内为下凸（上凸）。

下面利用函数的凸性证明不等式。

例3　设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n个正数，证明：

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

证明：令$f(t)=\ln t$，在$f(t)$在$(0,\infty)$内二阶可导且$f''(t)<0$，从而$f(t)$为凸函数，取$x_i=a_i$得：

$$\ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

从而不等式右端成立，将$\frac{1}{a_i}$代替a_i得左端不等式。

六、 利用积分不等式证明不等式

若函数$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$在区间$[a,b]$上可积且满足$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx$$

下面利用定积分不等式证明例1

证明：因为当$t>0$时有$1-t^2<1<1+t$，所以有：

$\int_0^x(1-t)dt<\int_0^x\frac{1}{1+t}dt<\int_0^x dt$，即：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$。

七、 利用定积分的定义证明不等式

若函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，则有：$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)\triangle x_i$

例4 证明，存在正常数$A<1$，对$\forall n>0$，有：$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<An^{\frac{3}{2}}$。

证明：设$f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0,1]$，则存在正常数$A<1$有：$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=A$，又由定积分的定义有：

$$A=\int_0^1\sqrt{x}\,dx>\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

即：$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<An^{\frac{3}{2}}$。

注释及参考文献：

〔1〕吉米多维奇.《数学分析习题集》

〔2〕刘玉琏等.《数学分析讲义》

〔3〕刘玉琏等.《数学分析讲义学习指导书》